

## PROBLEMA 2

Le funzioni  $g_1, g_2, g_3, g_4$  sono definite nel modo seguente:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln(|x|).$$

1. Verifica che nei punti  $x = 1$  e  $x = -1$  le funzioni  $g_1, g_2, g_3, g_4$  condividono le stesse rette tangenti.
2. Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , deduci quelli delle funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_1(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_2(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_3(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

classifica gli eventuali punti di non derivabilità di  $f_1, f_2, f_3$  e posto

$$I_1 = \int_{-e}^e f_1(x) dx,$$

$$I_2 = \int_{-e}^e f_2(x) dx,$$

$$I_3 = \int_{-e}^e f_3(x) dx,$$

verifica le disuguaglianze:

$$I_1 < I_3 < I_2.$$

3. Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ g_1(x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ \ln(|x|), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

dimostra che la funzione:

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

ammette uno zero nell'intervallo  $[\sqrt{e}; e]$ .

- 
4. Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di  $\frac{\pi}{3}$  radianti intorno all'asse  $x$  la regione di piano delimitata dalle rette di equazioni  $x = -1$ ,  $x = +1$  e dai grafici di  $g_2$  e  $g_1$ .

**PROBLEMA 2**

1. Le quattro funzioni:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln|x|,$$

sono tutte definite su  $\mathbb{R}$  e quindi sono definite in un intorno di  $x = 1$  e di  $x = -1$ .  
Calcoliamo le derivate prime delle funzioni:

$$g_1'(x) = x,$$

$$g_2'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

$$g_3'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4'(x) = \frac{1}{x}.$$

I grafici delle quattro funzioni presentano la stessa retta tangente in  $x = 1$ , poiché in tale punto le funzioni assumono lo stesso valore e le rette tangenti hanno lo stesso coefficiente angolare:

$$g_1(1) = g_2(1) = g_3(1) = g_4(1) = 0;$$

$$g_1'(1) = g_2'(1) = g_3'(1) = g_4'(1) = 1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto  $x = 1$  è:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 1.$$

Analogamente, coincidono le rette tangenti ai grafici delle quattro funzioni nel punto  $x = -1$ :

$$g_1(-1) = g_2(-1) = g_3(-1) = g_4(-1) = 0;$$

$$g_1'(-1) = g_2'(-1) = g_3'(-1) = g_4'(-1) = -1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto  $x = -1$  è:

$$y - 0 = (-1) \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 1.$$

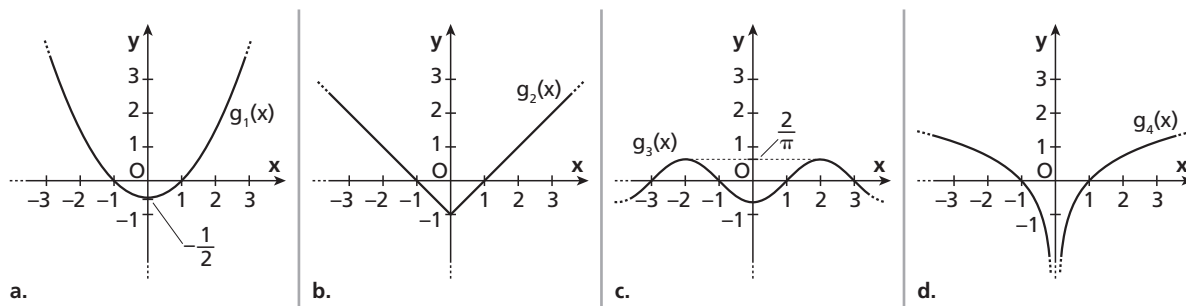
2. Osserviamo che le funzioni  $g_i(x)$  sono tutte pari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Per disegnare i grafici delle funzioni, osserviamo quanto segue:

- $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$  è una parabola con la concavità verso l'alto e di vertice  $(0; -\frac{1}{2})$ ;

- $g_2(x) = |x| - 1$  è ottenuta applicando alla funzione valore assoluto elementare  $y = |x|$  una traslazione verso il basso di 1;
- $g_3(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  è ottenuta applicando alla funzione elementare  $y = \cos x$  una contrazione orizzontale di fattore  $\frac{\pi}{2}$  e una contrazione verticale di fattore  $-\frac{2}{\pi}$ , ha periodo  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ ;
- $g_4(x) = \ln|x|$  è ottenuta per simmetria rispetto all'asse delle ordinate della funzione elementare  $y = \ln x$ .

Disegniamo i quattro grafici.



■ Figura 4

Le tre funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  sono definite a tratti; in particolare i loro grafici corrispondono a quelli di  $g_4(x)$  per  $x \leq -1 \vee x \geq 1$  e, rispettivamente, a quelli di  $-g_1(x)$ ,  $-g_2(x)$ ,  $-g_3(x)$  per  $-1 < x < 1$ .

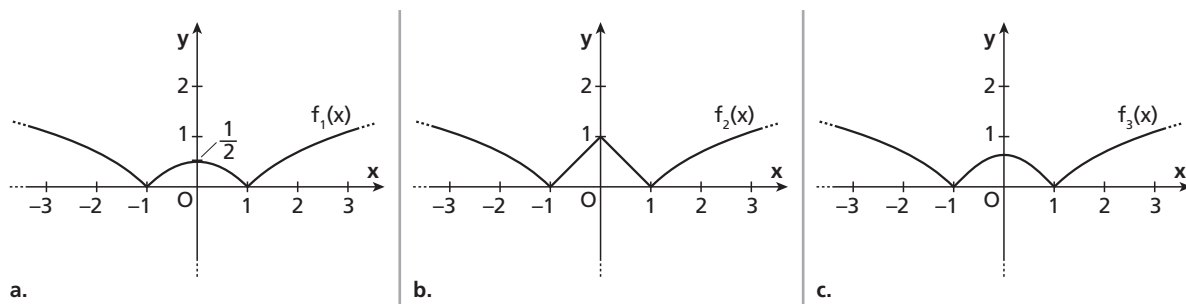
Analiticamente abbiamo:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Disegniamo i tre grafici.



■ Figura 5

Per tutte e tre le funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  e  $f_3(x)$  i punti  $x = 1$  e  $x = -1$  sono punti angolosi. Infatti, per quanto ricavato in precedenza, in tali punti le rette tangenti da sinistra e da destra hanno coefficiente angolare rispettivamente  $-1$  e  $+1$ .

Per  $x \neq \pm 1$ , le tre funzioni  $f_1(x)$  e  $f_3(x)$  sono continue e derivabili mentre la funzione  $f_2(x)$  ha un altro punto angoloso in  $x = 0$  poiché  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_2'(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2'(x) = -1$ .

Verifichiamo se è soddisfatta la catena di disuguaglianze  $I_1 < I_3 < I_2$ . Osserviamo innanzi tutto che le funzioni  $f_i(x)$  sono sempre non negative, coincidono per valori esterni all'intervallo  $[-1; 1]$  e sono simmetriche rispetto all'asse  $y$ ; chiedersi se è vera la catena  $I_1 < I_3 < I_2$  equivale quindi a chiedersi se è vera la catena di disuguaglianze:

$$\int_0^1 f_1(x) dx < \int_0^1 f_3(x) dx < \int_0^1 f_2(x) dx.$$

Calcoliamo:

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0,33;$$

$$\int_0^1 f_2(x) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[ x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\int_0^1 f_3(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = \frac{4}{\pi^2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0,41.$$

È quindi verificato che  $I_1 < I_3 < I_2$

3. Consideriamo:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e la funzione integrale:

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt.$$

La funzione  $h(x)$  è continua in  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  e presenta in  $x = 0$  una discontinuità a salto, quindi  $H(x)$  è continua in  $\mathbb{R}$ . Otteniamo infatti:

- per  $x \leq 0$ :

$$H(x) = - \int_x^0 0 dt = 0;$$

- per  $0 < x \leq 1$ :

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt = \int_0^x \left( \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) dt = \left[ \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t \right]_0^x = \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x,$$

e in particolare  $H(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ ;

- per  $x > 1$ :

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x h(t) dt = \int_0^1 h(t) dt + \int_1^x h(t) dt = -\frac{1}{3} + \int_1^x \ln t dt = \\ &= -\frac{1}{3} + [t \ln t - t]_1^x = -\frac{1}{3} + x \ln x - x + 1. \end{aligned}$$

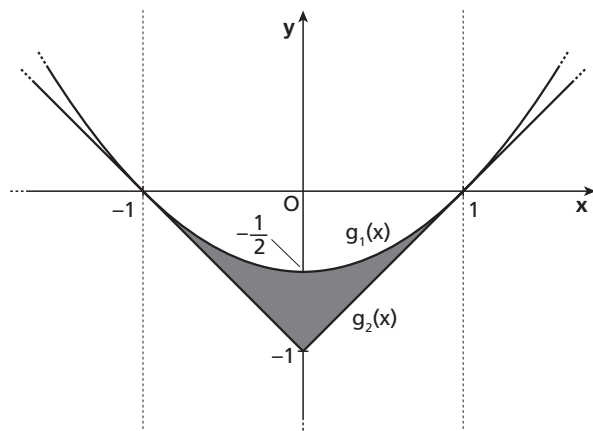
La funzione  $H(x)$  è dunque continua in  $[\sqrt{e}; e]$  con:

$$H(\sqrt{e}) = -\frac{1}{3} + \sqrt{e} \ln \sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{e} \simeq -0,16 \rightarrow H(\sqrt{e}) < 0;$$

$$H(e) = -\frac{1}{3} + e \ln e - e + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \rightarrow H(e) > 0.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri,  $H(x)$  ammette almeno uno zero in  $]\sqrt{e}; e[$ .

- d. Evidenziamo in grigio, nella figura, la regione delimitata dalle rette di equazione  $x = -1$ ,  $x = 1$  e dai grafici di  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$ .



■ Figura 6

In generale, il volume del solido generato dalla rotazione completa (cioè di  $2\pi$  radianti) attorno all'asse  $x$  di una regione sottesa al grafico di  $f(x)$  in un intervallo  $[a; b]$  è dato dall'integrale  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

Poiché la rotazione è di  $\frac{\pi}{3}$  radianti, il volume  $V_{\frac{\pi}{3}}$  si ottiene dalla proporzione  $V_{\frac{\pi}{3}} : V = \frac{\pi}{3} : 2\pi$ .

$$\text{Quindi } V_{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} V = \frac{1}{6} V = \frac{\pi}{6} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Nel caso in esame, dobbiamo considerare il solido che si ottiene ruotando di  $\frac{\pi}{3}$  radianti la funzione  $g_2(x)$  svuotato del solido che si ottiene ruotando di  $\frac{\pi}{3}$  radianti la funzione  $g_1(x)$ .

Tenendo infine conto della simmetria rispetto all'asse  $y$ , otteniamo per il volume:

$$\begin{aligned} V_{\frac{\pi}{3}} &= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^1 [g_2^2(x) - g_1^2(x)] dx = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \int_0^1 \left[ (x-1)^2 - \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left( x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left( -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{3} \left[ -\frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{3} \left( -\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{15}. \end{aligned}$$