Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1: il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa. L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero. Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe. Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo.

1. Scelto un riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:

$$y = e^{ax^2+bx+c} + (x+d)^2 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

$$y = \frac{\sin^2(ax+b) + \cos^2(ax+b)}{cx+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri a, b, c, e d in base alle dimensioni definite dall'artigiano;

3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;

4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

© Zanichelli Editore, 2018

PROBLEMA 1: il porta scarpe da viaggio

1. Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso il cui grafico deve rappresentare il profilo progettato dall'artigiano. Una delle condizioni richieste è che tale funzione deve avere uno zero in corrispondenza di $x = 3$. Se consideriamo la funzione $y = e^{ax^2+bx+c} + (x+d)^2$, essa è la somma di una funzione esponenziale (sempre positiva) con il quadrato di un binomio (sempre non negativo), pertanto non può avere uno zero. Ugualmente la funzione $y = \frac{\sin^2(ax+b)+\cos^2(ax+b)}{cx+d}$, che per l'identità fondamentale della goniometria può essere riscritta come $y = \frac{1}{cx+d}$, è una funzione omografica che non si annulla mai. La funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è una funzione polinomiale che può annullarsi in $x = 3$ scegliendo opportunamente i parametri. È pertanto l'unica che può soddisfare le condizioni richieste.

2. Tenuto conto che l'unità di misura assunta per la lunghezza è il dm, consideriamo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x \in [0; 3]$ e imponiamo al corrispondente grafico il passaggio per i punti del profilo $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$, $F\left(1; \frac{4}{5}\right)$, $B\left(2; \frac{6}{5}\right)$, $C(3; 0)$:

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ a+b+c+d = \frac{4}{5} \\ 8a+4b+2c+d = \frac{6}{5} \\ 27a+9b+3c+d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ a+b+c = \frac{2}{5} \\ 4a+2b+c = \frac{2}{5} \\ 27a+9b+3c+\frac{2}{5} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Eq.3} - \text{Eq.2}} \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ 3a+b = 0 \\ 4a+2b+c = \frac{2}{5} \\ 27a+9b+3c+\frac{2}{5} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ b = -3a \\ 4a-6a+c = \frac{2}{5} \\ 27a-27a+3c+\frac{2}{5} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ c = -\frac{2}{15} \\ a = -\frac{4}{15} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

L'equazione della funzione diventa quindi:

$$f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} \text{ con } 0 \le x \le 3.$$

3. Studiamo la funzione $f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5}$ nell'intervallo $x \in [0; 3]$. Trattandosi di una cubica essa è continua e derivabile sul dominio naturale $\mathbb{R}$ e quindi in particolare nell'intervallo.

- Intersezione con gli assi cartesiani: per le condizioni del profilo vi sono i seguenti punti di intersezione: $\left(0; \frac{2}{5}\right)$, $(3; 0)$. Dato che il profilo rappresenta un contenitore per scarpe, non ci aspettiamo che la funzione abbia altri zeri, né che assuma valori negativi.

© Zanichelli Editore, 2018

Verifichiamo che non vi siano altri punti di intersezione con l'asse delle ascisse risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^3-6x^2+x-3=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (x-3)(2x^2+1)=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}.$$

Quindi $f(x)$ si annulla solo in $x=3$.

- Segno della funzione: poiché la funzione è fattorizzabile come $f(x)=-\frac{4}{15}(x-3)(2x^2+1)$, essa è non negativa nell'intervallo $[0;3]$. In particolare $f(x)$ è positiva nell'intervallo $[0;3[$, come previsto. Possiamo già dire che il punto $C(3;0)$ è minimo assoluto.
- Studio della derivata prima ed estremanti: calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno:

$$f'(x)=-\frac{4}{5}x^2+\frac{8}{5}x-\frac{2}{15}.$$

$$f'(x)>0 \rightarrow -12x^2+24x-2>0 \rightarrow 6x^2-12x+1<0.$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono: $x=\frac{6-\sqrt{30}}{6}\simeq 0,09$ e $x=\frac{6+\sqrt{30}}{6}\simeq 1,91$.

Pertanto:

per $0<x<\frac{6-\sqrt{30}}{6} \lor \frac{6+\sqrt{30}}{6}<x<3$, $f'(x)<0$ e la funzione è decrescente;

per $\frac{6-\sqrt{30}}{6}<x<\frac{6+\sqrt{30}}{6}$, $f'(x)>0$ e la funzione è crescente;

per $x=\frac{6-\sqrt{30}}{6}$ la funzione ha un minimo relativo, per $x=\frac{6+\sqrt{30}}{6}$ ha un massimo relativo, di coordinate rispettivamente $N\left(\frac{6-\sqrt{30}}{6};\frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$ e $M\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6};\frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$.

Confrontiamo $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right)$ con $f(0)$: $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right)=\frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30}\simeq 1,21$ mentre $f(0)=\frac{2}{5}=0,4$.

Poiché $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right)>f(0)$, il massimo relativo M è anche massimo assoluto.

Nella figura 2 è riportato il quadro dei segni della derivata prima.

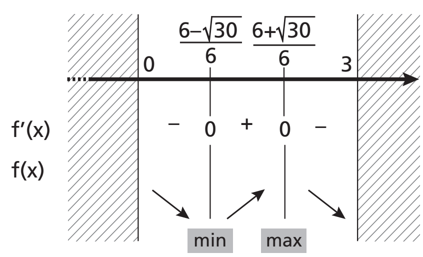

Figura 2

- Studio della derivata seconda, del suo segno ed eventuali flessi:

$$f''(x)=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}=-\frac{8}{5}(x-1),$$

$f''(x)>0$ se $x<1$: il grafico ha la concavità rivolta verso l'alto per $0<x<1$;

$f''(x)>0$ se $x>1$: il grafico ha la concavità rivolta verso il basso per $1<x<3$;

$f''(x)=0$ se $x=1$: il grafico ha un flesso F di coordinate $\left(1;\frac{4}{5}\right)$ come richiesto dalla descrizione del profilo.

© Zanichelli Editore, 2018

In figura 3 è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$ sul dominio $[0; 3]$.

Il massimo M del grafico ha ordinata $y_M = \frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30} \simeq 1{,}2$ dm, pertanto il contenitore non potrà essere adoperato per una scarpa alta 14 cm.

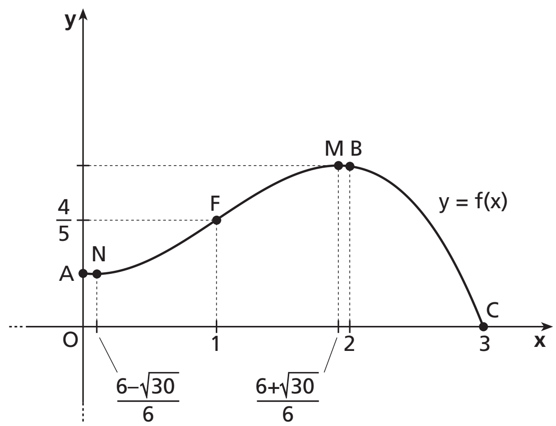

Figura 3

4. Assunto come x il numero discreto dei contenitori prodotti e venduti in un mese e tenuto conto del costo di produzione di 5 € per ogni contenitore e di un costo fisso mensile di 500 €, il costo di produzione totale mensile è $5x + 500$ euro. Ritenendo poi di poter vendere ciascun oggetto a 15 €, il ricavo mensile risulta $15x$ euro. Il rapporto ricavo/costo è allora rappresentato dalla funzione a variabile discreta non negativa $f(x) = \frac{15x}{5x + 500}$ con $x \in \mathbb{N}$. I punti discreti del corrispondente grafico appartengono a una funzione omografica a variabile continua di centro di simmetria $(-100; 3)$, con asintoti $x = -100$ e $y = 3$ e passante per l'origine degli assi. Rappresentiamo in figura 4 tramite un sistema cartesiano dimetrico il corrispondente grafico.

Osserviamo che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo tende a stabilizzarsi a un valore pari a 3 e non cresce indefinitamente all'aumentare dei contenitori prodotti, come invece previsto dall'artigiano. Ciò significa che il ricavo tende a diventare il triplo della spesa pur rimanendone inferiore.

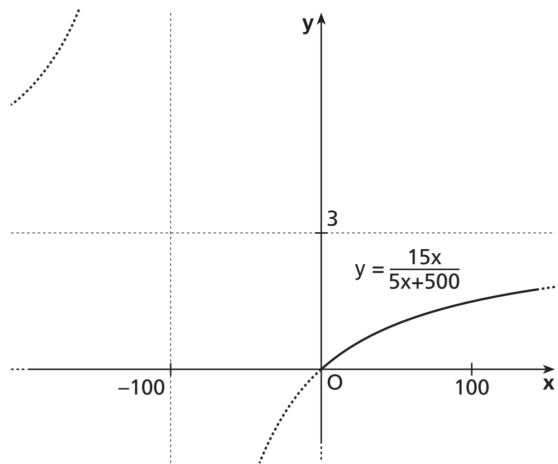

Figura 4

© Zanichelli Editore, 2018