10 Analizza il grafico della funzione $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ e studiane i punti di discontinuità.
Dopo aver individuato il tipo di discontinuità scrivi l'espressione della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità.

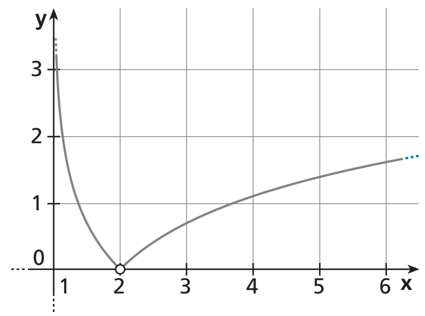

Figura 1

10 La funzione $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ è definita per $1 < x < 2 \vee x > 2$ e può essere riscritta come funzione a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x-1) & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}.$$

La funzione $f(x)$ è continua nei punti interni degli intervalli su cui è definita.
Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [-\ln(x-1)] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} [-\ln(x-1)] = 0,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty.$$

Il grafico corrispondente alla funzione ha asintoto verticale $x = 1$; ha pertanto in tale punto una discontinuità di seconda specie.
Diversamente, nel punto $x = 2$ limite destro e limite sinistro sono entrambi finiti e coincidenti tra loro. Quindi il grafico ha una discontinuità di terza specie eliminabile attraverso il seguente prolungamento continuo di f:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 1 < x < 2 \vee x > 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}.$$