PROBLEMA 2: il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione. Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi. Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;
2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di −18 °C, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10 °C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt},$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g,$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a,$$

e determina il valore che deve avere il parametro k, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm;

4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

PROBLEMA 2: il ghiaccio

1. Consideriamo un parallelepipedo a base quadrata di lato b e volume 10 dm^3. Indicata con h l'altezza del solido, esplicitiamola in funzione di b, tenendo conto della formula del volume del parallelepipedo, $V = b^2 \cdot h$:

$$h(b) = \frac{10}{b^2}.$$

Calcoliamo la superficie totale S del parallelepipedo in funzione del lato b:

$$S = 4b \cdot h + 2b^2 \rightarrow S(b) = 4b \cdot \frac{10}{b^2} + 2b^2 \quad \rightarrow \quad S(b) = 2b^2 + \frac{40}{b}, \quad \text{con } b > 0.$$

Studiamo tale funzione.

- Dominio: $b > 0$, per limiti geometrici; in tale intervallo la funzione è continua e derivabile e non è né pari né dispari.
- Intersezione con gli assi cartesiani: poiché $b > 0$ e $S(b) > 0$ perché somma di due addendi sempre positivi, il grafico della funzione non interseca gli assi.
- Segno della funzione: nel dominio la funzione è positiva perché somma di quantità positive.
- Ricerca degli asintoti: valutiamo i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{b \to 0^+} \left(2b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty \qquad \rightarrow \quad \text{la retta } b = 0 \text{ è asintoto verticale nell'intorno destro di } b = 0;$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(2b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty \qquad \rightarrow \quad \text{non esistono asintoti orizzontali;}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{2b^2 + \frac{40}{b}}{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{2b^3 + 40}{b^2} = +\infty \qquad \rightarrow \quad \text{non esistono asintoti obliqui.}$$

- Studio della derivata prima ed estremanti: calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno:

$$S'(b) = 4b - \frac{40}{b^2} = \frac{4(b^3 - 10)}{b^2}, \quad S'(b) > 0 \quad \rightarrow \quad b > \sqrt[3]{10}.$$

Pertanto:

- per $0 < b < \sqrt[3]{10}$, $S'(b) < 0$ e la funzione è decrescente;
- per $b > \sqrt[3]{10}$, $S'(b) > 0$ e la funzione è crescente;
- per $b = \sqrt[3]{10} \simeq 2{,}2$ la funzione ha un minimo relativo di ordinata $S(\sqrt[3]{10}) = 2(\sqrt[3]{10})^2 + \frac{40}{\sqrt[3]{10}} = \frac{60}{\sqrt[3]{10}} \simeq 27{,}8$. Il grafico ha quindi un minimo relativo di coordinate $M\left(\sqrt[3]{10}; \frac{60}{\sqrt[3]{10}}\right)$ che è anche minimo assoluto.

- Studio della derivata seconda, del suo segno ed eventuali flessi:

  $$S''(b) = 4 + \frac{80}{b^3},$$

  essendo $S''(b) > 0$ in tutto il dominio, il grafico ha sempre concavità rivolta verso l'alto.
  In figura 5 è rappresentato il grafico della funzione $S(b)$ nel riferimento cartesiano ObS.

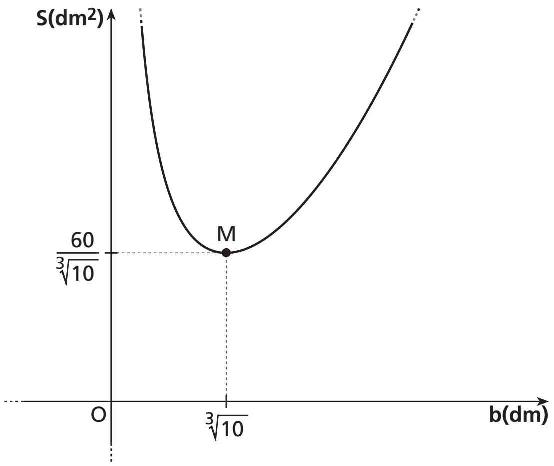


Figura 5

2. Assumiamo che il minimo scambio termico con l'esterno avvenga quando è minima la superficie del parallelepipedo di ghiaccio. Pertanto il valore di b che minimizza la funzione S, trovato al punto 1, è $b = \sqrt[3]{10}$. La corrispondente altezza risulta:

$$h(\sqrt[3]{10}) = \frac{10}{(\sqrt[3]{10})^2} = \sqrt[3]{10}.$$

Il parallelepipedo così ottenuto è un cubo di volume 10 dm^3 e di spigolo $\sqrt[3]{10}$ dm.

3. Il processo di riscaldamento, subito da un blocco di ghiaccio a temperatura iniziale $T_g = -18$ °C a contatto con l'ambiente circostante, che si trova a $T_a = 10$ °C, è regolato dalla legge fondamentale della calorimetria fino a quando la temperatura del blocco non raggiunge la temperatura di fusione di 0 °C. Assumiamo che tale temperatura nel tempo t di trasporto non venga mai raggiunta. Quindi deve essere $T \leq 0$.
Riscriviamo le funzioni proposte per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione, sostituendo i valori numerici $T_g = -18$ °C e $Ta = 10$ °C:

$$T_1(t) = (T_g - T_a)e^{-kt} \quad \rightarrow \quad T_1(t) = -28e^{-kt},$$

$$T_2(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g \quad \rightarrow \quad T_2(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18 = 10 - 28e^{-kt},$$

$$T_3(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a \quad \rightarrow \quad T_3(t) = 28e^{-kt} - 10.$$

La condizione iniziale che la funzione deve soddisfare è che all'istante $t = 0$ deve essere:

$$T(0) = -18.$$

Calcoliamo l'immagine per $t = 0$ delle tre funzioni:

$$T_1(0) = -28 \neq -18,$$

$$T_2(0) = -18$$

$$T_3(0) = 18 \neq -18.$$

Se ne conclude che solo la funzione $T_2(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18$ soddisfa la condizione iniziale.
Indichiamola genericamente come $T(t) = 10 - 28e^{-kt}$.
Stabiliamo ora le altre condizioni richieste: la funzione temperatura deve essere crescente, con velocità però decrescente nel tempo.
Calcoliamo per questo le funzioni derivata prima e derivata seconda della funzione T e imponiamo le corrispondenti condizioni $T'(t) > 0$ e $T''(t) < 0$:

$$T'(t) = 28ke^{-kt}, \qquad T'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad k > 0,$$

$$T''(t) = -28k^2 e^{-kt}, \qquad T''(t) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{qualsiasi } k.$$

Osserviamo anche che $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} (10 - 28e^{-kt}) = 10$, che corrisponde al valore asintotico della temperatura ambiente ed è indipendente dal valore di k.

Richiediamo per ultimo che il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero, stabilendo che la funzione T abbia dominio fisico $[0; 2 \text{ min}]$ e codominio $[-18\ °C; 0\ °C]$. Per questo imponiamo la condizione $T(2 \text{ min}) \leq 0$:

$$T(2) = 10 - 28e^{-2k} \leq 0 \quad \rightarrow \quad e^{-2k} \geq \frac{5}{14} \quad \rightarrow$$

$$2k \leq \ln\frac{14}{5} \quad \rightarrow \quad k \leq \ln\sqrt{\frac{14}{5}} \simeq 0{,}51.$$

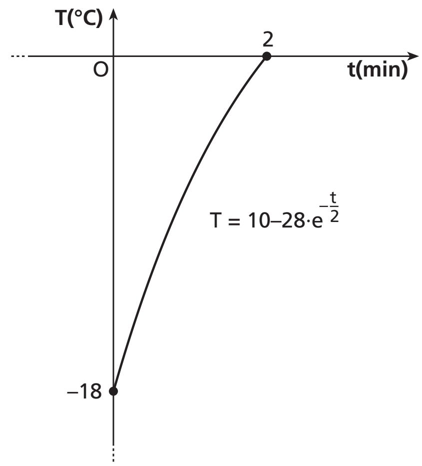


Figura 6

Si conclude che deve essere $0 < k \leq \ln\sqrt{\frac{14}{5}}$.

In figura 6 è rappresentato il grafico della funzione $T(t) = 10 - 28e^{-kt}$ nel proprio dominio e codominio fisico per $k = \frac{1}{2}$.

4. Consideriamo il contenitore a tronco di cono di raggio di base minore uguale a $r = 1$ dm, raggio di base maggiore uguale $R = 1{,}5$ dm e altezza $h = 2$ dm. Il suo volume è:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cdot (1^2 + 1{,}5^2 + 1 \cdot 1{,}5) = 9{,}948\ldots \simeq 9{,}95 \text{ dm}^3.$$

Calcoliamo il volume di acqua V_a necessaria a produrre un volume $V_g = 10$ dm^3 di ghiaccio sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%:

$$10 = V_a + 9{,}05\% \cdot V_a \quad \rightarrow \quad V_a = \frac{10}{1 + 0{,}0905} = \frac{20\,000}{2181} = 9{,}170\ldots \simeq 9{,}17 \text{ dm}^3.$$

Poiché $V_a < V$, il recipiente è in grado di contenere l'acqua per produrre il blocco di ghiaccio.

Immaginiamo ora di versare il volume V_a di acqua nel contenitore di volume V; indichiamo con r_a il raggio della superficie libera dell'acqua e con x l'altezza dal fondo del recipiente raggiunta dal liquido, con $0 < x < 2$ (si veda la figura 7 in semisezione).

Consideriamo la similitudine dei triangoli EDC e ABC:

$$ED : AB = DC : BC \quad \rightarrow \quad (R - r_a) : (R - r) = (h - x) : h \quad \rightarrow$$

$$(1{,}5 - r_a) : (1{,}5 - 1) = (2 - x) : 2 \quad \rightarrow \quad 1{,}5 - r_a = \frac{2 - x}{4} \quad \rightarrow$$

$$r_a = \frac{4 + x}{4} = 1 + \frac{x}{4}.$$

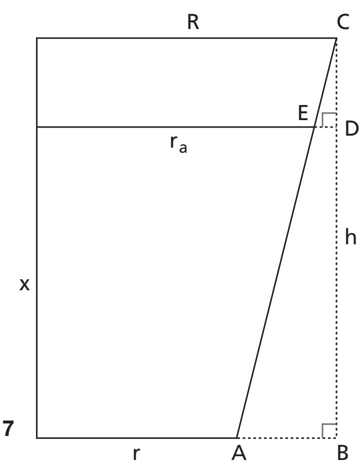


Figura 7

Calcoliamo il volume del tronco di cono di altezza x e imponiamolo uguale al valore $V_a = \frac{20\,000}{2181}$:

$$\frac{1}{3}\pi x(r^2 + r_a^2 + rr_a) = \frac{20\,000}{2181} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi x\left(1 + 1 + \frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4}\right) = \frac{20\,000}{2181} \quad \rightarrow$$

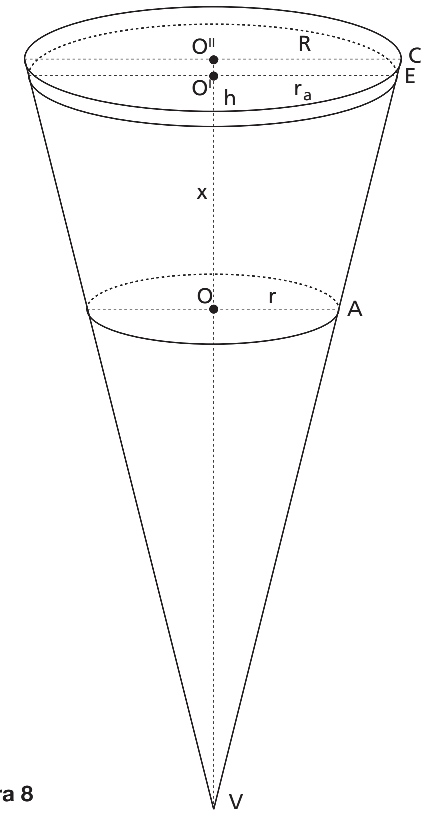
$$x^3 + 12x^2 + 48x = \frac{16 \cdot 20\,000}{727\pi}.$$

Risolviamo l’equazione con un completamento del cubo:

$$(x+4)^3-64=\frac{16\cdot 20000}{727\pi}\ \rightarrow\ (x+4)^3=\frac{16\cdot 20000}{727\pi}+64\ \rightarrow\ x+4=\sqrt[3]{\frac{320000+46528\pi}{727\pi}}\ \rightarrow$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{320000+46528\pi}{727\pi}}-4=1{,}88781\ldots\simeq 1{,}89\ \text{dm}.$$

Si conclude che l’altezza dal fondo del recipiente a cui arriva l’acqua necessaria a produrre il blocco richiesto è circa 1,89 dm.
In alternativa si può trovare tale altezza considerando il cono di vertice V e raggio di base R, generatore del tronco di cono del recipiente (figura 8).



■ **Figura 8**

Ricaviamo VO per similitudine dei triangoli VOA e $VO''C$:

$$VO'':VO=O''C:OA\ \rightarrow\ VO'':VO=R:r.C$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(VO''-VO):VO=(R-r):r\ \rightarrow\ h:VO=(R-r):r\ \rightarrow$$

$$VO=\frac{hr}{(R-r)}\ \rightarrow\ VO=\frac{2}{0{,}5}=4\ \text{dm}.$$

Calcoliamo il volume V_r del cono di raggio di base OA e altezza VO:

$$V_r=\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{OA}^2\cdot\overline{VO}=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 4=\frac{4}{3}\pi\ \text{dm}^3.$$

Determiniamo il volume V_{r_a} del cono di raggio di base $O'E$ e altezza VO' come somma tra V_r e V_a:

$$V_{r_a}=V_r+V_a=\frac{4}{3}\pi+\frac{20000}{2181}.$$

Applichiamo il teorema che stabilisce la proporzione tra volumi di coni simili e i cubi delle corrispondenti altezze:

$$V_{r_a}:V_r=\overline{O'V}^{\,3}:\overline{OV}^{\,3}\ \rightarrow\ \left(\frac{4}{3}\pi+\frac{20000}{2181}\right):\frac{4}{3}\pi=(x+4)^3:64\ \rightarrow$$

$$(x+4)^3=\frac{64\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{20000}{2181}\right)}{\frac{4}{3}\pi}\ \rightarrow\ (x+4)^3=64+\frac{16\cdot 20000}{727\pi}\ \rightarrow$$

$$x+4=\sqrt[3]{\frac{46528\pi+320000}{727\pi}}\ \rightarrow\ x=\sqrt[3]{\frac{46528\pi+320000}{727\pi}}-4=$$

$$1{,}88781\ldots\simeq 1{,}89\ \text{dm}.$$