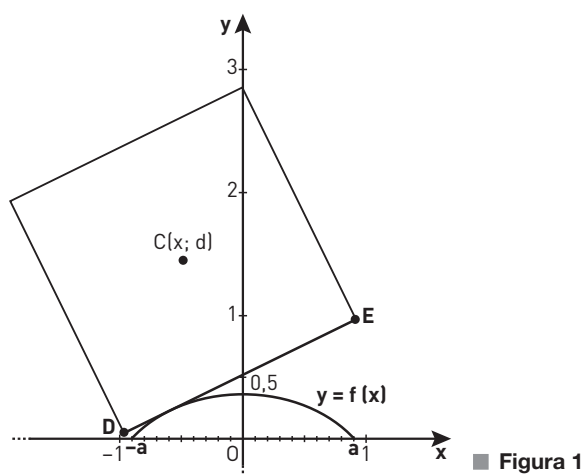


### PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico. È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano  $Oxy$ : il quadrato di lato  $DE = 2$  (in opportune unità di misura) e di centro  $C$  rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione  $f(x)$  rappresenta il profilo della pedana.

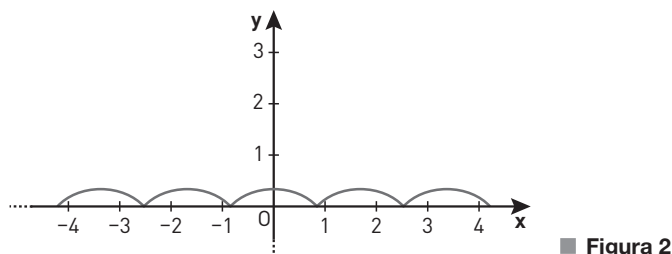


1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 1, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per  $x \in [-a; a]$ ; determina inoltre il valore degli estremi  $a$  e  $-a$  dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione  $f(x)$  relativo all'intervallo  $[-a; a]$ , come mostrato in figura.



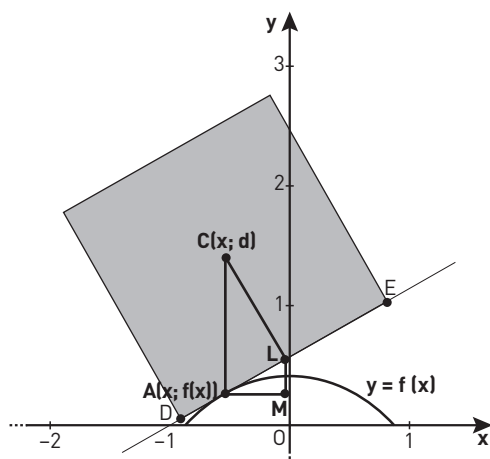
2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una «gobba», cioè dell'arco di curva di equazione

$$y = f(x) \text{ per } x \in [-a; a].$$

Stabilisci se tali condizioni sono verificate<sup>1</sup>.

3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli  $ACL$  e  $ALM$  in figura, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata  $d$  del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.



■ Figura 3

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

---

1. In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione  $y = \varphi(x)$  compreso tra le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

**PROBLEMA 1**

1. Studiamo la funzione  $f(x)$  per verificare che il suo grafico sia compatibile con il profilo della pedana.

*Dominio della funzione.*  $x \in \mathbb{R}$

*Eventuali simmetrie della funzione.*

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

La funzione è pari.

*Intersezione con l'asse y.*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Osserviamo che  $\sqrt{2} - 1 \simeq 0,414 < 0,5$ ; nel grafico vediamo che effettivamente l'intersezione della curva con l'asse y ha ordinata minore di 0,5.

*Intersezioni con l'asse x.*

$$y = 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 = 0$$

Poniamo  $z = e^x$ .

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt{2} \pm 1.$$

Osserviamo che i due valori ottenuti sono positivi, quindi otteniamo due soluzioni distinte per  $x$ .

$$e^x = \sqrt{2} \pm 1 \rightarrow x = \ln(\sqrt{2} + 1) \vee x = \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Per la simmetria della funzione, i due valori ottenuti sono opposti, con  $\ln(\sqrt{2} \pm 1) \simeq \pm 0,88$ .

Concludiamo che  $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

*Segno della funzione.*

$$y > 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} < 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} < \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 < 0$$

Poniamo  $z = e^x$  e ricordiamo che  $\ln(x)$  è una funzione monotona crescente.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 < 0 \rightarrow \sqrt{2} - 1 < z < \sqrt{2} + 1 \rightarrow \ln(\sqrt{2} - 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Quindi  $f(x)$  è positiva nell'intervallo  $] -a; a[$ , in accordo al grafico assegnato.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow e^{-x} - e^x > 0 \rightarrow e^x < \frac{1}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} < 1 \rightarrow 2x < \ln 1 \rightarrow x < 0$$

La funzione è quindi crescente per  $x < 0$ , decrescente per  $x > 0$ . Per  $x = 0$  la funzione ha un massimo assoluto.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione non ha flessi e volge la concavità verso il basso.

Possiamo concludere che il grafico della funzione assegnata è compatibile con il profilo della pedana.

2. Chiamiamo  $\bar{f}(x)$  la funzione ottenuta affiancando le copie del grafico di  $f(x)$ .  $\bar{f}(x)$  è una funzione continua, periodica di periodo  $2a$ . Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra nel punto di non derivabilità  $x = a = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

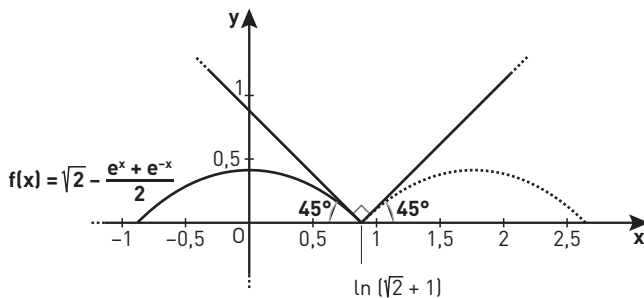
$$\bar{f}'_-(a) = f'(a) = \frac{e^{-a} - e^a}{2} = \frac{1 - e^{2a}}{2e^a} = \frac{1 - e^{2\ln(\sqrt{2}+1)}}{2e^{\ln(\sqrt{2}+1)}} =$$

$$\frac{1 - (\sqrt{2} + 1)^2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-2(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2} + 1)} = -1$$

Per la periodicità di  $\bar{f}(x)$  e per la simmetria di  $f'(x)$  (che è una funzione dispari), otteniamo:

$$\bar{f}'_+(a) = f'(-a) = -f'(a) = 1.$$

Nel punto  $x = a$  la tangente sinistra e la tangente destra del grafico hanno coefficienti angolari rispettivamente  $-1$  e  $1$ ; il prodotto di tali coefficienti angolari è  $-1$ , quindi le rette sono perpendicolari. Per la periodicità la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità.



■ Figura 5

Per determinare la lunghezza dell'arco descritto da  $f(x)$  in  $[-a; a]$  calcoliamo l'integrale

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Poiché  $f'(x)$  è dispari, la funzione integranda è pari, quindi:

$$L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx =$$

$$2 \int_0^a \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} dx = \int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx.$$

Osserviamo che l'espressione all'interno della radice quadrata è uguale a  $(e^x + e^{-x})^2$ , quindi:

$$L = \int_0^a \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int_0^a (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^a =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2$$

L'arco è quindi lungo come il lato del quadrato.

In alternativa l'integrale  $\int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx$  si poteva risolvere per sostituzione, ponendo  $e^x = t$ .

Dal cambio di variabile segue:

$$x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt;$$

$$x = 0 \rightarrow t = 1;$$

$$x = a \rightarrow t = e^a.$$

L'integrale diventa:

$$L = \int_1^{e^a} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{2t^2 + 1 + t^4}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$\int_1^{e^a} \sqrt{\left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \int_1^{e^a} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [t - t^{-1}]_1^{e^a} =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$\frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2.$$

Come ulteriore possibilità, potevamo risolvere l'integrale:

$$L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx$$

applicando le formule del seno iperbolico e del coseno iperbolico.

Se ricordiamo infatti che:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c; \quad \int \cosh x dx = \sinh x + c;$$

per l'integrale  $L$  ricaviamo:

$$L = 2 \int_0^a 1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2 dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + (\cosh^2 x - 1)} dx =$$

$$2 \int_0^a \sqrt{\cosh^2 x} dx = 2 \int_0^a \cosh x dx = 2 [\sinh x]_0^a = 2 \left( \frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \right) = e^a - e^{-a},$$

da cui si ottiene il risultato precedente.

- Il punto  $L$  è la proiezione del centro  $C$  del quadrato sul lato  $DE$ , quindi il triangolo  $ACL$  è rettangolo in  $L$ . Il punto  $M$  ha la stessa ascissa di  $L$  e la stessa ordinata di  $A$ , quindi il triangolo  $ALM$  è rettangolo in  $M$ . Le rette  $AC$  e  $LM$  sono parallele perché entrambe parallele all'asse  $y$ , quindi formano con la trasversale  $DE$  angoli alterni interni congruenti:  $\widehat{ALM} \cong \widehat{LAC}$ . I triangoli  $ACL$  e  $ALM$  hanno dunque tutti gli angoli congruenti e quindi sono simili.

Per il significato geometrico della derivata prima:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x).$$

Per la similitudine fra i triangoli abbiamo:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

dove  $\overline{LC} = 1$  poiché corrisponde a metà del lato del quadrato. Combinando le due uguaglianze otteniamo

$$f'(x) = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \rightarrow f'(x) = \overline{AL}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo  $ACL$ :

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{\overline{LC}^2 + \overline{AL}^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto:

$$d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}.$$

- d.** Per evitare ambiguità, chiamiamo  $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Osserviamo che il grafico di  $g(x)$  si ottiene da quello di  $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  tramite una traslazione verso il basso lungo l'asse  $y$ , in quanto  $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$ .

Determiniamo l'angolo  $\alpha$  formato dalla tangente a  $g(x)$  nel punto  $x = -\frac{\ln 3}{2}$  con l'asse  $x$ , calcolando la derivata prima di  $g(x)$  in tale punto.

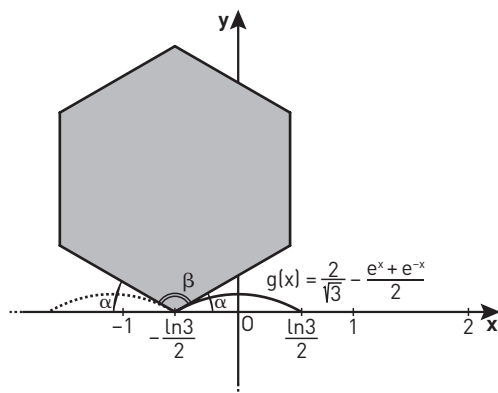
$$g'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \rightarrow g'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$$

L'angolo interno  $\beta$  del poligono regolare cercato è quindi:

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ.$$

Il poligono regolare che ha angoli interni di  $120^\circ$  è l'esagono regolare.



■ Figura 6

Infine, per calcolare la lunghezza  $l$  del lato dell'esagono regolare, imponiamo che tale lunghezza sia uguale a quella della «gobba» individuata da  $g(x)$  nell'intervallo  $\left[-\frac{\ln 3}{2}, \frac{\ln 3}{2}\right]$ .

Poiché  $g'(x) = f'(x)$ , i calcoli sono simili a quelli svolti nel punto 2. nel caso del quadrato, cambiando solo gli estremi di integrazione:

$$l = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} 1 + [g'(x)]^2 dx = \dots = [e^x - e^{-x}]_0^{\frac{\ln 3}{2}} = e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 1,15.$$