

9 Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

- 9 Studiamo la funzione $f(x) = \arctan x + x^3 + e^x$. Gli zeri di questa funzione corrispondono alle soluzioni dell'equazione data.

Osserviamo che $f(x)$ è continua e strettamente crescente su tutto \mathbb{R} poiché somma di tre funzioni continue e strettamente crescenti su tutto \mathbb{R} . Inoltre, è illimitata sia inferiormente sia superiormente, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \infty + 0 = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \infty + \infty = +\infty.$$

Quindi, $f(x)$ è iniettiva e suriettiva su \mathbb{R} . La biettività assicura che $f(x)$ assume tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$ una e una sola volta. In particolare, esiste esattamente un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.